5 İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİF. DENKLEMLERİN SERİ ÇÖZÜMLERİ

Bir lineer denklemin genel çözümünü bulmak homojen kısmın temel çözümlerinin belirlenmesine bağlıdır. Sabit katsayılı diferansiyel denklemlerin temel çözümlerinin yapısı verilmişti. Eğer değişken katsayılı diferansiyel denklemlerin geniş sınıfı ile ilgilenmek istiyorsak, bildiğimiz elementer fonksiyonların ötesinde, çözüm için araştırmamızı genişletmeye ihtiyacımız vardır. Bunun temel aracı verilen fonksiyonu kuvvet serisine açarak temsil etmektir. Belirsiz katsayılar yöntemine benzer olarak verilen diferansiyel denklemin çözümünün kuvvet serisine açılımını düşünüp, denklemi sağlayacak katsayıları belirlemek amacımız olacaktır.

Bu bölümde kuvvet serilerini kullanarak ikinci mertebeden katsayıları bağımsız değişkenin fonksiyonu olan lineer diferansiyel denklemlerin temel çözümlerinin yapısını inceleyeceğiz.

5.1 Kuvvet Serileri

Analizden bildiğiniz kuvvet serileri için gerekli bilgileri özetleyelim:

1) Bir kuvvet serisi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ 'nin bir x noktasında yakınsak olması o noktada

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} a_n (x-x_0)^n$$

nin var olmasıdır. Bu seri $x = x_0$'da kesinlikle yakınsaktır. Bir kuvvet serisi $x = x_0$'ın dışındaki her noktada yakınsak olmayabilir veya her noktada yakınsak veya belli bir aralıkta yakınsak olabilir.

2) Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} \left| a_n (x-x_0)^n \right|$ bir x noktasında yakınsak ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ serisine x noktasında <u>mutlak yakınsak</u> denir. Eğer seri mutlak yakınsak ise yakınsaktır. Fakat tersi doğru değildir.

3) Bir kuvvet serisinin mutlak yakınsak olup olmadığını test etmenin en kolay yollarından biri oran testini kullanmaktır. Eğer $a_n \neq 0$ ve sabit bir x değeri için

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n (x-x_0)^n} \right| = |x-x_0| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$$

ve $L<1$ ise seri mutlak yakınsak. $L>1$ ise ıraksaktır. $L=1$ ise serinin yakınsak olup olmadığı hakkında bir şey söyleyemeyiz.

<u>**Örnek**</u>: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^2 (x-3)^n$ serisi yakınsak mıdır?

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+2}(n+1)^2 (x-3)^{n+1}}{(-1)^{n+1} n^2 (x-3)^n} \right| = |x-3| \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 = |x-3|$$

eğer $|x-3|<1$ ise yani $2<x<4$ ise seri mutlak yakınsak, $|x-3|>1$ ise seri ıraksaktır. $|x-3|=1$ ise yani $x=2$ ve $x=4$'de $n\to\infty$ için genel terim sıfıra gitmediğinden seri ıraksaktır.

4) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ serisi $x = x_1$ noktasında yakınsak ise $|x-x_0| < |x_1-x_0|$'da mutlak yakınsak, $x = x_1$ noktasında ıraksak ise $|x-x_0| > |x_1-x_0|$'da ıraksaktır.

5) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ serisi $|x-x_0| < \rho$ için mutlak yakınsak, $|x-x_0| > \rho$ için ıraksak olacak şekilde negatif olmayan bir ρ sayısı vardır. Buna <u>yakınsaklık yarıçapı</u> denir. Eğer seri yalnız $x = x_0$'da yakınsak ise $\rho = 0$ olarak tanımlanır. Eğer seri her x için yakınsak ise $\rho = \infty$ denir. Eğer $\rho > 0$ ise $|x-x_0| < \rho$ aralığına <u>yakınsaklık aralığı</u> denir.

<u>**Örnek**</u>: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n2^n}$ serisinin yakınsaklık yarıçapını belirleyiniz.

Oran testini uygularsak

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} \cdot \frac{n2^n}{(x+1)^n} \right| = \frac{|x+1|}{2} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right) = \frac{|x+1|}{2}$$

elde edilir. Buna göre $|x+1| < 2$, yani $-3 < x < 1$ için seri mutlak yakınsak,

$|x+1|>2$ için ise seri ıraksaktır. Serinin yakınsaklık yarıçapı $\rho=2$ dir.

Uç noktaları incelersek $x=-3$'de seri $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ olur ki bu seri yakınsaktır. $x=1$'de seri $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ olur ki bu seri ıraksaktır. Buna göre $-3\le x<1$ için seri yakınsaktır. Bu aralığın dışında seri ıraksaktır. $-3<x<1$ ise seri mutlak yakınsaktır.

Eğer, $\rho>0$ ve $|x-x_0|<\rho$ için $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ ve $\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n$ sırasıyla $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarına yakınsıyorsa $|x-x_0|<\rho$ için;

6) Seriler terim-terime toplanıp, çıkarılabilir ve

$$f(x)\pm g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)(x-x_0)^n$$

dır.

7) Seriler formel olarak çarpılabilir ve

$$f(x)g(x)=\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n\right]=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$$

dir. Burada $c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0$ dır. Hatta eğer $g(x_0)\neq 0$ ise seriler bölünebilir ve

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}d_n(x-x_0)^n$$

dır. Çoğu durumda d_n

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=\left[\sum_{n=0}^{\infty}d_n(x-x_0)^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}d_nb_{n-k}\right)(x-x_0)^n$$

bağıntısından kolayca elde edilir.

8) f fonksiyonu, $|x-x_0|<\rho$ aralığında sürekli ve her mertebeden türeve sahiptir. Hatta $f', f'',...$ seri terim-terime türetilerek hesaplanabilir. Yani,

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+\cdots+na_n(x-x_0)^{n-1}+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-x_0)^{n-1}$$

$$f''(x)=2a_2+6a_3(x-x_0)+\cdots+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}+\cdots$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$$

dir ve her seri $|x-x_0|<\rho$ aralığında mutlak yakınsaktır.

9) a_n'nin değeri,

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

ile verilir. Bu seriye $x=x_0$'da f fonksiyonunun Taylor serisi denir.

10) Eğer her x için $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n$ ise

$a_n=b_n,\ n=0,1,...$ dir. Özel olarak her x için $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=0$ ise $a_0=a_1=\cdots=a_n=\cdots=0$ dır.

Bir f fonksiyonu $x=x_0$'da Taylor serisine açılıyorsa

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,\qquad |x-x_0|<\rho$$

dır ve $x=x_0$'da f 'ye <u>analitiktir</u> denir. 6. ve 7. maddelere göre, eğer f ve g, $x=x_0$'da analitik ise $f\pm g, f\cdot g$ ve f/g $\left(g(x_0)\neq 0\right)$ fonksiyonları da $x=x_0$'da analitiktir.

Bir seride toplam indisi, integrasyon değişkeninde olduğu gibi yapma (taklit) değişkendir. Yani

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n!}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2^j x^j}{j!}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k x^k}{k!}$$

aynı toplamı ifade eder.

Örnekler: 1) $\sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n$ serisini $n=0$ 'dan başlatarak yazınız.

$m=n-3$ diyelim. $n=m+3$ dür ve m 'nin sıfırdan başlaması n 'nin üçten başlaması ile aynıdır. Buna göre

$$\sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+3} x^{m+3}$$

dır. İndisler yapma değişkenler olduğundan m yerine n yazabiliriz. Buna göre

$$\sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+3} x^{n+3}$$

dır.

2) $\sum_{n=2}^{\infty} n(n+1)a_n(x-x_0)^{n-2}$ serisini $(x-x_0)^n$ terimine göre yazınız.

n terimini $n+2$ kadar ötelersek

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+3)a_{n+2}(x-x_0)^n$$

yazarız.

3) $x\sum_{n=0}^{\infty}(r+n+1)a_n x^{r+n+1}$ serisini x^{r+n} terimine göre yazınız.

x 'i içeri alırsak seri $\sum_{n=0}^{\infty}(r+n+1)a_n x^{r+n+2}$ olur. İndisi iki düşürürsek

$$\sum_{n=2}^{\infty}(r+n-1)a_{n-2}x^{r+n}$$

elde edilir.

4) $\sin x$ 'i $x_0=0$ 'da, $\ln x$ 'i $x_0=1$ 'de Taylor serilerine açınız ve yakınsaklık yarıçaplarını bulunuz.

$$f(x)=\sin x$$

$$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)$$

....

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{(n)}(0)=\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0 & , \quad n=2k \\ 1 & , \quad n=4k+1 \qquad k=0,1,2,... \\ -1 & , \quad n=4k+3\end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n = f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{x^2}{2!}+f'''(0)\frac{x^3}{3!}+\cdots+f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

$$=0+1\cdot x+0\cdot\frac{x^2}{2!}+(-1)\frac{x^3}{3!}+0+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+3}}{(2n+3)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{(-1)^n x^{2n+1}}\right| = x^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}=0$$

$\forall x\in\mathbb{R}$ için seri yakınsaktır. Yani $\rho=\infty$ dur.

$$\text{sinx} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$g(x) = \ln x$$
$$g'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$
$$g''(x) = -1 \cdot x^{-2}$$
$$g'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot x^{-3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$g^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} 1 \cdot 2 \cdots (n-1) x^{-n}$$
$$g^{(n)}(1) = (-1)^{n+1}(n-1)!$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = g(1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{n!}(x-1)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}(x-1)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+2}(x-1)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(-1)^{n+1}(x-1)^n} \right| = |x-1| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |x-1|$$

$|x-1| < 1$ aralığında seri mutlak yakınsak, $\rho = 1$ yakınsaklık yarıçapıdır.

5) $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$ denklemini sağlayan a_n katsayılarını belirleyiniz. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serisini temsil eden fonksiyonu bulunuz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} -2 a_n x^n$$

$$(n+1) a_{n+1} = -2 a_n \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$
$$a_{n+1} = \frac{-2}{(n+1)} a_n \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$a_1 = -2a_0, \;\; a_2 = (-2)^2 \frac{a_0}{2!}, \;\; a_3 = (-2)^3 \frac{a_0}{3!}, \; \ldots, \; a_n = (-2)^n \frac{a_0}{n!}, \; \ldots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!} a_0 = a_0 e^{-2x}$$